2009年　東大数学　　文系第4問 ①

(1)も(2)も $f(0)=0$ かつ $f(2)=2$ の条件下なので、先に代入しておく

$f(0)=0 \Leftrightarrow c=0$

$f(2)=2 \Leftrightarrow 4a+2b+c=2$

(1)では、Sをaの関数で表すため、a以外の文字を消去し、aだけ残す。

$c=0$ かつ $b=-2a+1$ より

$f(x)=ax^2+(1-2a)x$

$f'(x)=2ax-2a+1$ である。

(1) $S=\int_0^2 |f'(x)|\,dx$ より

$0\leqq x\leqq 2$ での $y=|f'(x)|=|2ax-2a+1|$ のグラフを描く。

・$f'(x)=2a(x-1)+1$ より $(1,1)$を通り傾き$2a$

・$2ax-2a+1=0$ を解くと $x=\dfrac{2a-1}{2a}$

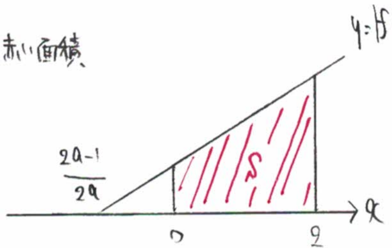
これをふまえて、場合分け。

$f(0)=-2a+1$　$f(2)=2a+1$

(i) $a\geqq 0$ のとき（傾きが正）

① $\dfrac{2a-1}{2a}\leqq 0 \Leftrightarrow a<\dfrac{1}{2}$ つまり $0\leqq a<\dfrac{1}{2}$ のとき グラフは下のよう

Sは右の赤い面積

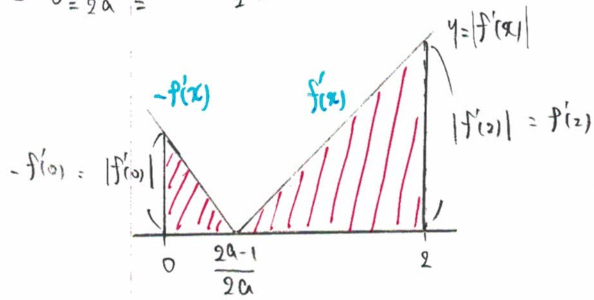


よって $S=(|f'(0)|+|f'(2)|)\times 2\times\dfrac{1}{2}$

$=(-2a+1+2a+1)\times 2\times\dfrac{1}{2}=2$

よって $0<a<\dfrac{1}{2}$のとき $S=2$

② $0\leqq\dfrac{2a-1}{2a}\leqq 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\leqq a$ の場合 グラフは下のよう。



$S=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{2a-1}{2a}-0\right)\times|f'(0)|+\dfrac{1}{2}\left(2-\dfrac{2a-1}{2a}\right)\times|f'(2)|$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2a-1}{2a}\cdot(2a-1)+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2a+1}{2a}\times(2a+1)$

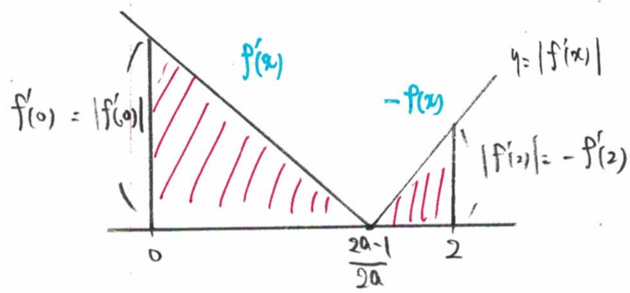
$=\dfrac{1}{4a}(4a^2-4a+1+4a^2+4a+1)$

$=\dfrac{1}{4a}(8a^2+2)=2a+\dfrac{1}{2a}$

よって $\dfrac{1}{2}\leqq a$ のとき $S=2a+\dfrac{1}{2a}$

(ii) a　0 のとき（傾きが負）

③ $0\leqq\dfrac{2a-1}{2a}\leqq 2 \Leftrightarrow a\leqq -\dfrac{1}{2}$ の場合 グラフは



$S=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{2a-1}{2a}-0\right)\times|f'(0)|+\dfrac{1}{2}\left(2-\dfrac{2a-1}{2a}\right)\times|f'(2)|$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2a-1}{2a}\times(-2a+1)+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2a+1}{2a}\times(-2a-1)$

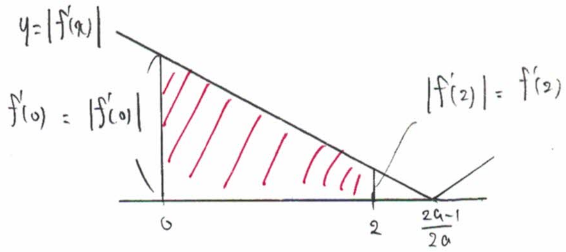
$=\cdots$

$=-2a-\dfrac{1}{2a}$

よって $a\leqq-\dfrac{1}{2}$ のとき $S=-2a-\dfrac{1}{2a}$

2009年　東大数学　文系第4問②

④ $2 \leqq \frac{2a-1}{2a} \iff -\frac{1}{2} \leqq a < 0$ のとき



$$S = \left(|f(0)| + |f(2)|\right) \times 2 \times \frac{1}{2}$$
$$= (-2a+1 + 2a+1) \times 2 \times \frac{1}{2}$$
$$= 2$$

よって　$-\frac{1}{2} \leqq a < 0$ のとき　$S = 2$

以上より　$S = \begin{cases} -2a - \frac{1}{2a} & \left(a \leqq -\frac{1}{2} のとき\right) \\ 2 & \left(-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2} のとき\right) \\ 2a + \frac{1}{2a} & \left(\frac{1}{2} \leqq a のとき\right) \end{cases}$ //

(2)　$a \leqq -\frac{1}{2}$ のとき

相加相乗で
Minを出すだけ

$$S = -2a + \frac{1}{-2a}$$

$-2a > 0$　$\frac{1}{-2a} > 0$ であり

相加相乗平均 の関係から

$$-2a + \frac{1}{-2a} \geqq 2\sqrt{(-2a) \times \left(\frac{1}{-2a}\right)} = 2$$

等号成立は　$-2a = \frac{1}{-2a}$　$a = -\frac{1}{2}$ のとき.

$\frac{1}{2} \leqq a$ のとき

$S = 2a + \frac{1}{2a}$ であり　$2a > 0$　$\frac{1}{2a} > 0$ から.

相加相乗平均の関係から

$$2a + \frac{1}{2a} \geqq 2\sqrt{2a \times \frac{1}{2a}} = 2$$

等号成立は　$2a = \frac{1}{2a}$　より　$a = \frac{1}{2}$　のとき

$a \leqq -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \leqq a$ のいずれの場合でも

S の最小値は 2 である.

よって、S の最小値は 2 である。//

(iii) ⑤ $a = 0$ のとき (傾き0)

$$S = \int_0^2 |1|\, dx = 2$$